INACAP IP
SEDE VICUÑA MACKENNA

ASIGNATURA: ELECTRICIDAD I
PROFESOR: RÓBINSON PÉREZ O.

ANÁLISIS DE CIRCUITOS

1. INTRODUCCIÓN:

Para resolver circuitos eléctricos con 2 o más fuentes de energía y 2 o más elementos pasivos (resistores, bobinas o capacitares) interconectados entre si se pueden utilizar varios métodos según sean las características del circuito y la o las variables que se deseen conocer.

Entre los métodos que se utilizan se pueden mencionar:

- Ecuaciones de mallas
- Superposición
- Ecuaciones de nudos
- Teorema de Thevenin
- Teorema de Norton
- Teorema de la Máxima Transferencia de Potencia

2. CONCEPTOS:

2.1. Red eléctrica o circuito eléctrico: Es un conjunto de conductores, resistencias, fuerzas electromotrices y contraelectromotrices, unidos entre si de forma arbitraria, de manera que por ellos circulan corrientes de distintas o iguales intensidades.

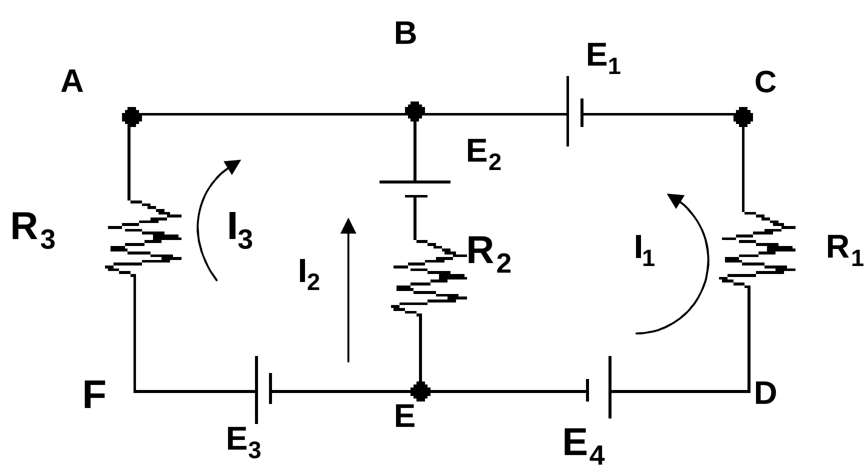
2.2. Nudo: Es la unión de dos o más terminales de diferentes elementos de un circuito, representa la conexión eléctrica de ellos.

2.3. Rama: Es la parte de una red comprendida entre dos nudos consecutivos y recorrida por la misma intensidad de corriente.

2.4. Lazo: Es una trayectoria cerrada a través de las ramas de una red, que pasa a lo más una vez por cada nudo.

2.5. Malla: Es un lazo que no puede subdividirse en lazos o más simples; también se puede decir que una malla es toda trayectoria cerrada (circuito conductor) que se obtiene partiendo de un nudo y volviendo a él, sin pasar dos veces por una misma rama.

La siguiente figura representa una red:



- Se -pueden distinguir tres ramas.
  1ª rama **EDCB** recorrida por la corriente $\mathbf{I_1}$
  2ª rama **EB** recorrida por la corriente $\mathbf{I_2}$
  3ª rama **EFAB** recorrida por la corriente $\mathbf{I_3}$
- Se pueden distinguir 2 mallas.
  Malla 1: **EFABE** (formada por los resistores $\mathbf{R_2}$ y $\mathbf{R_3}$ y la fuente $\mathbf{E_3}$)
  Malla 2: **EBCDE** (formada por los resistores y y las fuentes $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ y $\mathbf{E_4}$).
- Cada una de las 2 mallas puede ser considerada como un lazo pero además la trayectoria **EFABCDE** también es un lazo.
- **<u>Nudos:</u>** todos los puntos indicados con letras mayúsculas son nudos, sin embargo, para el análisis. Son importantes los nudos a los cuales llegan a lo menos 3 terminales de elementos; en este caso serán nudos principales **B** y **E** entre los cuales están conectadas las 3 ramas del circuito.

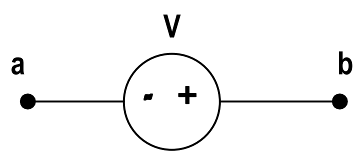
3. FUENTES DE ENERGÍA:

3.1. Concepto:

Una fuente de energía es un elemento que tiene la capacidad de introducir energía a un sistema, tomándola del exterior, por esta razón se dice que las fuentes ya sea de tensión o de corriente son elementos activos de un circuito.

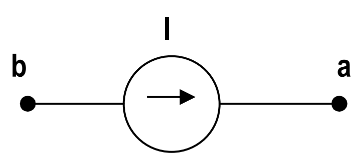
3.2. Fuentes tensión independiente:

Esta fuente entrega una tensión cuyo valor es independiente de la corriente que entrega; es decir, entrega un voltaje constante para cualesquier valor de carga.



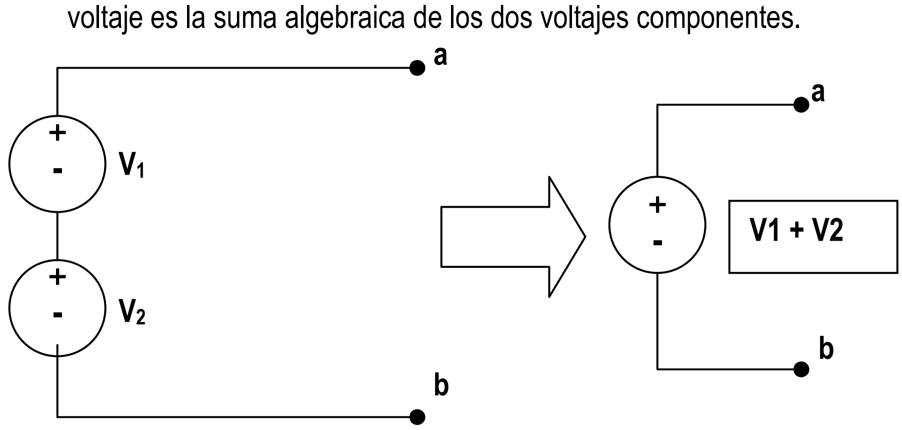
3.3. Fuente de corriente independiente:

Esta fuente entrega una corriente constante cuyo valor es independiente de la tensión.

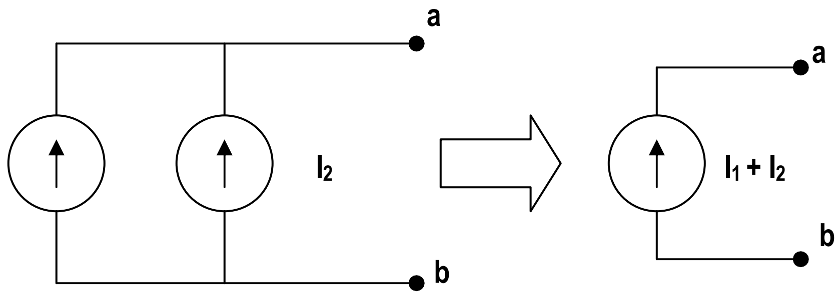


4. CONSIDERACIONES:

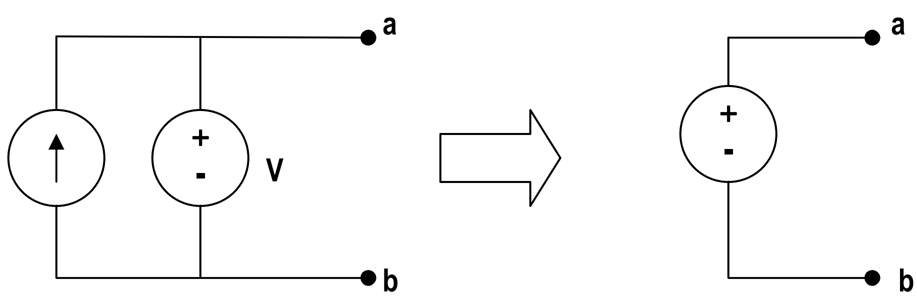
4.1. Dos fuentes de tensión conectadas en serie son equivalentes a una fuente de tensión, cuyo voltaje es la suma algebraica de los dos voltajes componentes.



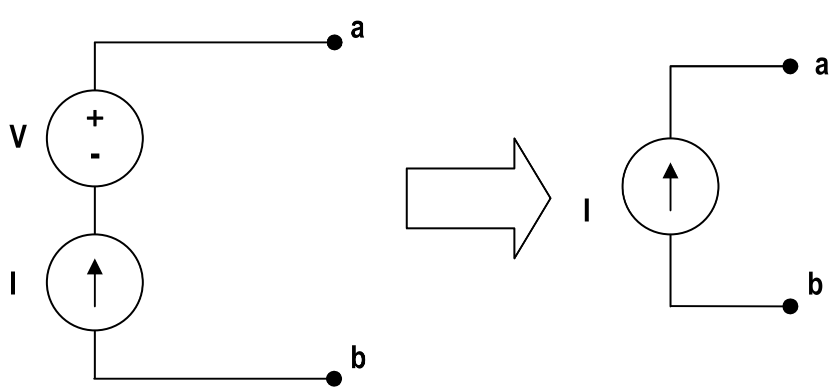
4.2. Dos fuentes de corriente conectadas en paralelo son equivalentes a una fuente de corriente, cuyo valor es la suma de las dos corrientes componentes.



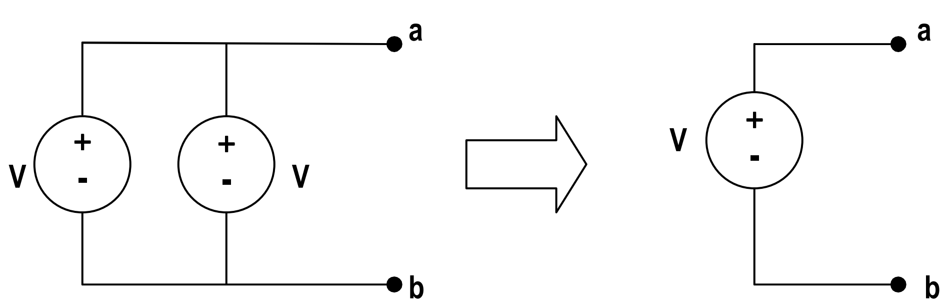
4.3. Una fuente de tensión en paralelo con una fuente de corriente son equivalentes a la fuente de tensión únicamente.



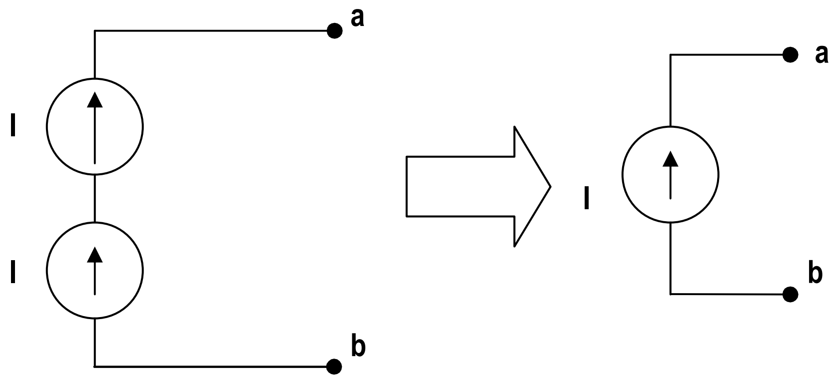
4.4. Una fuente de tensión en serie con una fuente de corriente son equivalentes a la fuente de corriente únicamente.



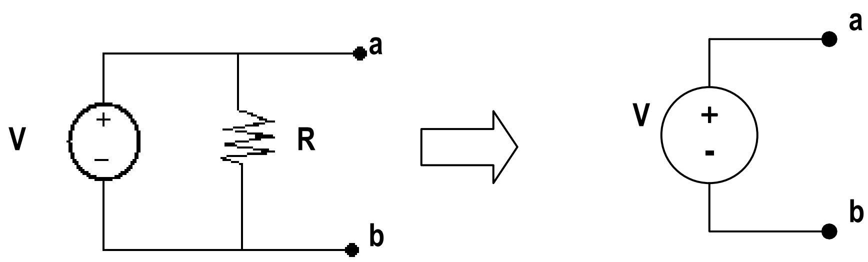
4.5. Dos fuentes de tensiones idénticas, conectadas en paralelo, son equivalentes a una sola de ellas.



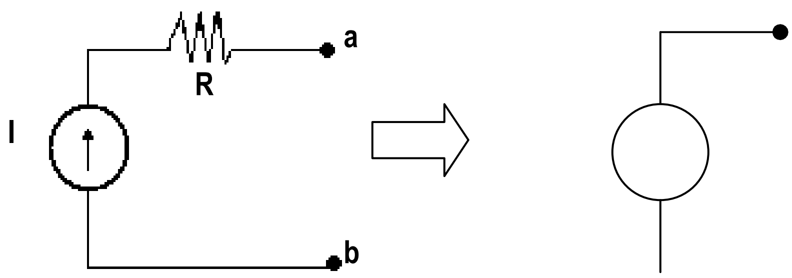
4.6. Dos fuentes de corriente idénticas, conectadas en serie, son equivalentes a una sola de ellas.



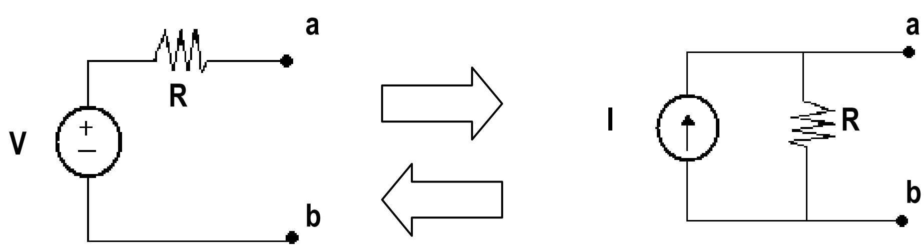
4.7. Una fuente de tensión con un elemento pasivo conectado en paralelo, es equivalente a la fuente de tensión actuando sola.



4.8. Una fuente de corriente en serie con un elemento pasivo, es equivalente a la fuente de corriente actuando sola.



4.9. Una fuente de tensión en serie con un elemento pasivo es equivalente a una fuente de corriente con el mismo elemento pasivo conectado en paralelo.



$\mathbf{V = I \times R}$ o bien $\mathbf{V = \frac{I}{G}}$

$\mathbf{I = \frac{V}{R}}$ o bien $\mathbf{I = V \cdot G}$

5. <u>TRANSFORMACIÓN DE FUENTES:</u>

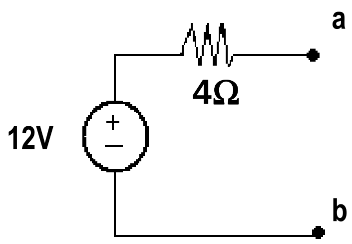
Una fuente independiente de Voltaje puede ser transformada a fuente independiente de corriente sólo si tiene una Resistencia en serie.

Una fuente independiente de Corriente puede ser transformada a fuente equivalente de voltaje sólo si tiene una resistencia en paralelo.

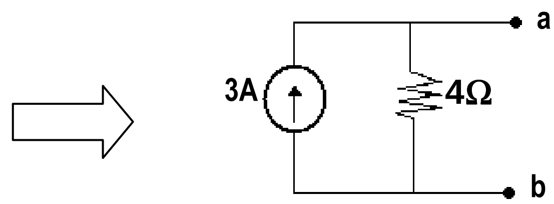
Ejemplos:

1) Transforme a fuente de corriente:

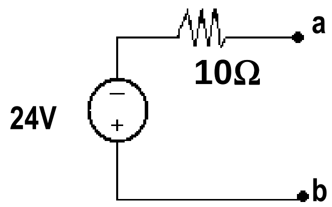
a)



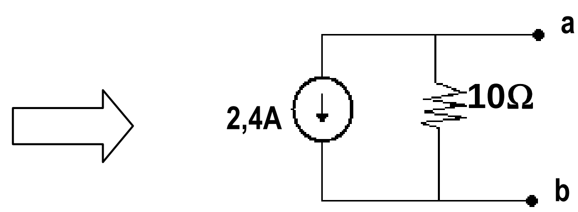
$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{4} = 3A$$



b)

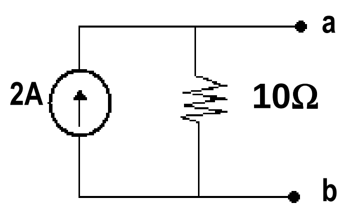


$$I = \frac{24}{10} = 2{,}4A$$

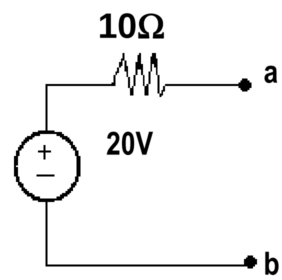


2) Transforme a fuente de tensión:

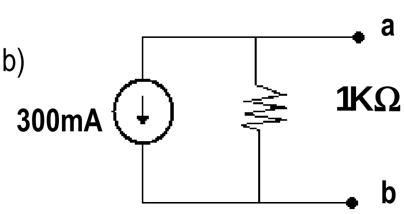
a)



$$V = I \times R = 2 \times 10 = 20V$$



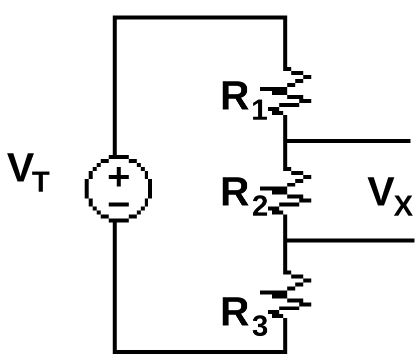
b)



$$V = 1 \times 10^3 \cdot 0{,}3 =$$

6. DIVISOR DE TENSIÓN:

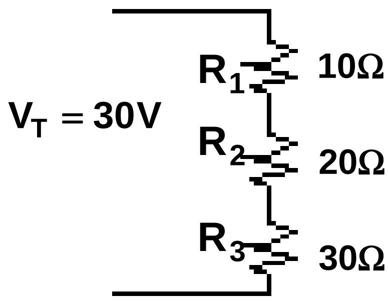
6.1. En los circuitos con resistores conectados en serie la tensión suministrada por la fuente se distribuye proporcionalmente entre los resistores (caídas de voltaje); la tensión o caída de voltaje en una de las resistencias se puede calcular aplicando la siguiente relación.



$$V_X = \frac{V_T \cdot R_X}{R_1 + R_2 + R_3 + ...Rn} =$$

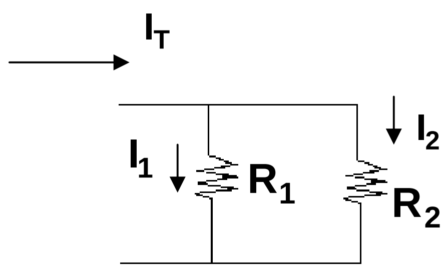
6.2. <u>Ejemplo:</u> En el circuito serie de la figura se necesita determinar la caída de voltaje en el Resistor Nº3. (R_3)

$$V_3 = \frac{V_T \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \times 30}{60} = 15\,\text{Volts}$$



7. DIVISOR DE CORRIENTE

La regla del divisor de corriente se aplica a resistores conectados en "paralelo", permite encontrar la corriente a través de cualquier resistor conocida la corriente que entra a la combinación.



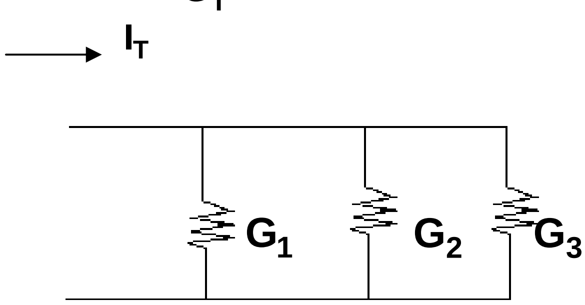
$$I_1 = \frac{I_T \cdot R_2}{R_1 + R_2} =$$

$$I_2 = \frac{I_T \cdot R_1}{R_1 + R_2} =$$

Nótese que para calcular la intensidad que pasa a través de R_1 se debe multiplicar la intensidad total que llega al nudo por la resistencia contraria en este caso R_2 y cuando se refiere encontrar I_2 se multiplica por R_1.

Cuando se tienen tres o más resistores conectados en paralelo es conveniente expresarlos como conductancias $(G = 1/R)$; la fórmula del divisor de corriente queda expresada.

$$I_X = \frac{G_X \cdot I_T}{G_T}$$



En el circuito de la figura:

$$I_1 = \frac{G_1 \cdot I_T}{G_T}$$

$$I_2 = \frac{G_2 \cdot I_T}{G_T}$$

$$I_3 = \frac{G_3 \cdot I_T}{G_T}$$

ETC.

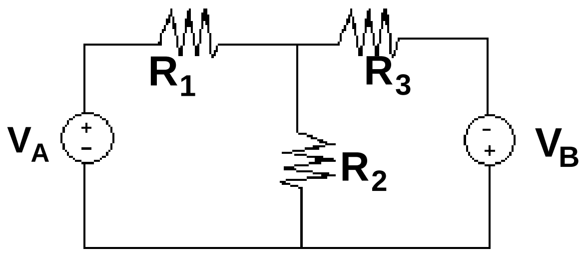
8. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS

8.1. Análisis por Mallas.

En este método se utiliza la Ley de tensiones de Kirchhoff para plantear una ecuación por cada una de las mallas que contenga el circuito que se está analizando.

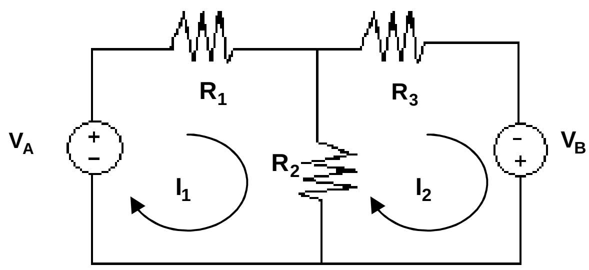
El propósito de este método es encontrar la corriente que circula por cada malla; a estas intensidades se les denomina corrientes de mallas y constituyen las incógnitas en las ecuaciones.

Observemos el siguiente circuito.



- Tiene dos mallas, la primera, que se designará como **malla 1** está formada por la fuente de tensión V_A y los resistores R_1 y R_2.
- La segunda malla (**malla 2**) compuesta por los resistores R_2 y R_3 y la fuente de voltaje V_B.

El primer paso consiste en asignar un sentido "arbitrario" a la corriente en cada malla; en este caso se asignó en el sentido de los punteros del reloj (hacia la derecha en ambas mallas); a la corriente que circula por la **malla 1** se le designó como I_1 y a la corriente de la **malla 2** se le designó como I_2.



Si nos damos cuenta, el resistor R_2 es común para ambas mallas, es decir, por él circula la I_1 en un sentido e I_2 en sentido contrario, por lo tanto la caída de tensión será:

$$(I_1 - I_2)\cdot R_2$$

Hecha la consideración anterior, planteamos la ecuación de la **malla 1** aplicando la Ley de Tensiones de Kirchhoff, recorriendo la malla en el sentido de la corriente.

$$V_A - I_1\cdot R_1 - (I_1 - I_2)\cdot R_2 = 0$$

$$V_A - I_1\cdot R_1 - I_1\cdot R_2 + I_2\cdot R_2 = 0$$ Despejamos V_A

$$V_A = -I_1\cdot R_1 + I_1\cdot R_2 - I_2 R_2$$ Sacamos Factor Común.

$$V_A = -I_1\cdot (R_1 + R_2) - I_2 R_2$$

Ordenamos la ecuación considerando que los resistores son valores conocidos y las corrientes las incógnitas.

Ecuación Nº1

$$\boxed{(R_1 + R_2)I_1 - R_2 I_2 = V_A}$$

El paso siguiente consiste en el planteamiento de la ecuación de la **malla Nº2**, recorriéndola en el sentido de la corriente.

$$V_B - (I_2 - I_1)\cdot R_2 - I_2 R_3 = 0$$

$$V_B - I_2 \cdot R_2 + I_1 \cdot R_2 - I_2 R_3 = 0$$

$$V_B = I_2 R_2 - I_1 \cdot R_2 + I_2 R_3$$

Ordenamos y factorizamos.

Ecuación Nº2

$$\boxed{R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3)I_2 = V_B}$$

Con estas dos ecuaciones formamos un sistema de dos ecuaciones simultáneas.

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)I_1 - R_2 I_2 &= V_A \\ -R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3)I_2 &= V_B \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones puede ser resuelto por alguno de los métodos conocidos.

ANALIZANDO EL SISTEMA DE ECUACIONES TENDREMOS

Suma de todas las resistencias por donde circula I_1 .

Menos la resistencia común por la corriente de la malla contraria (**malla 2**).

$$(R_1 + R_2)I_1 - R_2 I_2 = V_A$$

Suma algebraica de todas las fuentes de tensión de la malla Nº1, en este caso sólo V_A .

La Ecuación Nº2 será.

Menos **(-)** la resistencia común por la corriente de la malla contraria (**malla 1**).

$$-R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3)I_2 = V_B$$

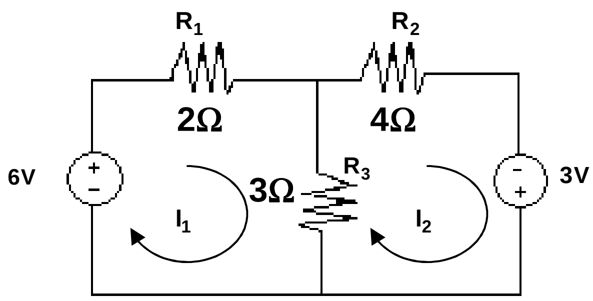
Más la suma de todos los resistores por donde circula la corriente.

Suma algebraica de todas las fuentes de tensión conectadas a la **malla 2**; en este caso sólo V_B.

Nota: Lo anterior es válido sólo si se asigna el mismo sentido a las corrientes en todas las mallas del circuito (por ejemplo hacia la derecha).

EJEMPLOS DE APLICACIÓN.

1. Determine la intensidad de corriente en cada una de las mallas del circuito.



a) Asignamos el sentido horario a las corrientes I_1 e I_2.
b) Planteamos las ecuaciones aplicando el análisis anterior.

$$\left.\begin{array}{r} 5I_1 - 3I_2 = 6 \\ -3I_1 + 7I_2 = 3 \end{array}\right|$$

(I_1 Circula a través de la R_1 y R_2 las que suman 5Ω.
I_2 Circula a través de la R_2 y la R_3 las que suman 7Ω.)

c) Aplicamos el método de la corriente de la **malla 1**.

$$\left.\begin{array}{r} 5I_1 - 3I_2 = 6 \\ -3I_1 + 7I_2 = 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \cdot 3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 35I_1 - \cancel{21I_2} = 42 \\ -9I_1 + \cancel{21I_2} = 9 \end{array}\right|$$

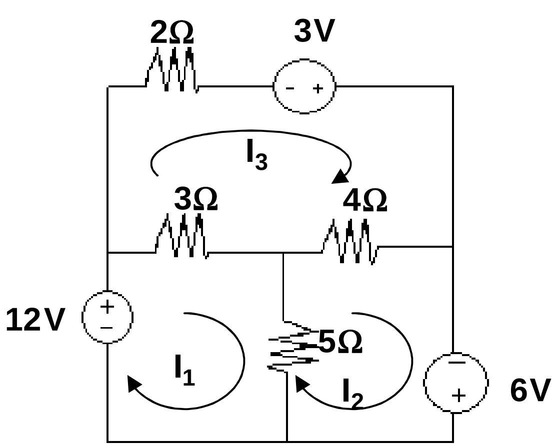
$$26I_1 = 51 \quad \text{Luego } I_1 = \frac{51}{26} = 1{,}962\,A$$

Reemplazamos el valor de I_1 en la 1ª ecuación para encontrar el valor de la corriente I_2.

$$35 \times 1{,}96 - 3I_2 = 6$$

$$I_2 = 1{,}269\,A$$

2. Plantear las ecuaciones para el circuito de tres mallas de la figura.



a) asignamos sentido horario a las corrientes.
b) Planteamos 3 ecuaciones, ya que son 3 mallas y por tanto habrá 3 incógnitas $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$ e $\mathbf{I_3}$.

$$\begin{array}{l|} 8I_1 - 5I_2 - 3I_3 = 12 \\ -5I_1 + 9I_2 - 4I_3 = 6 \\ -3I_1 - 4I_2 + 9I_3 = 3 \\ \hline \end{array}$$

c) Este sistema de tres ecuaciones puede ser resuelto aplicando la regla de Cramer, utilizando el álgebra matricial calculando determinantes.

$$I_1 = 13{,}436A \qquad I_2 = 12{,}798A \qquad I_3 = 10{,}5A$$

<u>II. TEOREMA DE SUPERPOSICIÓN.</u>

Este principio o teorema establece que las corrientes (o tensiones) en cada elemento de una red con 2 o más fuentes (ya sean de corriente o de tensión) corresponde a la suma algebraica de los aportes de cada una de las fuentes.

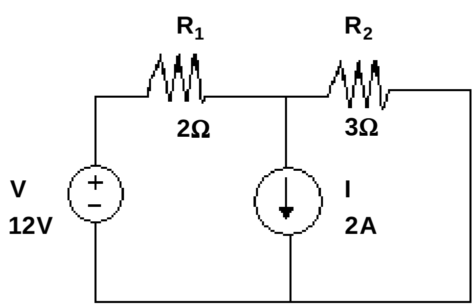
Lo anterior significa que si queremos encontrar la corriente o la tensión en un circuito debemos calcular la corriente y o la tensión que entrega cada una de las fuentes por separado, anulando las demás, y luego sumar estos aportes.

Para anular (hacer cero) las fuentes se debe tener presente que:

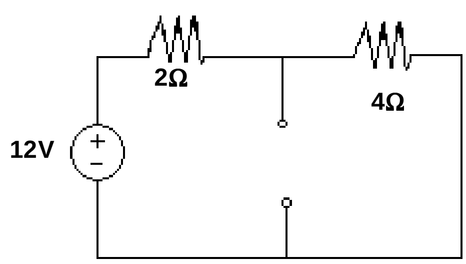
a) Una fuente de tensión (voltaje) se sustituye o reemplaza por un <u>cortocircuito</u>.
b) Una fuente de corriente se reemplaza por un <u>circuito abierto</u>.

<u>Ejemplo Nº1:</u>

Aplicar el principio de superposición al circuito de la figura; se desea encontrar la corriente en cada resistor.



a) Anulamos la fuente de corriente dejándola abierta.



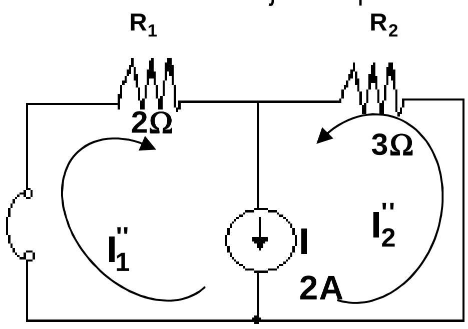
Determinamos $\mathbf{I_T}$ en el circuito.

$I_T = \dfrac{12}{6} = 2A$ Como los resistores y están conectados en serie, la corriente a través de ellos será la misma **(2 A)**, luego:

$$I_1' = 2A$$

$$I_2' = 2A$$

c) Anulamos la fuente de voltaje reemplazándola por un cortocircuito.



La corriente entregada por la fuente **2A** se divide en:

- I_1'' que circula a través de R_1.
- I_2'' que circula a través de R_2.

Aplicamos fórmula del divisor de corriente para encontrar I_1''.

$$I_1'' = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2A$$

La encontramos aplicando Ley de corrientes de Kirchhoff al nudo.

$$I_2'' = I_T - I_1'' = 2 - 1{,}2 = 0{,}8A$$

d) Por último aplicamos superposición para determinar I_1 e I_2.

I_1 será la suma de $I_1' + I_1''$ ya que tienen el mismo sentido.

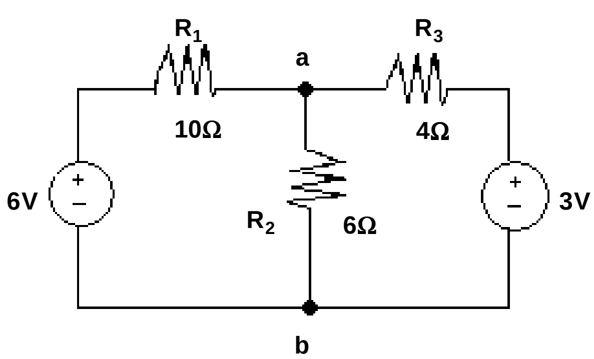
$I_1 = I_1' + I_1'' = 2 + 1{,}2 = 3{,}2A$ circulando hacia la derecha por R_1.

I_2 será I_2' menos I_2'' ya que tienen sentidos distintos (son opuestos).

$I_2 = I_2' - I_2'' = 2 - 0{,}8 = 1{,}2A$ esta corriente circula hacia la derecha a través de R_2 ya que I_2' es mayor y circula en este sentido.

<u>Ejemplo Nº2:</u>

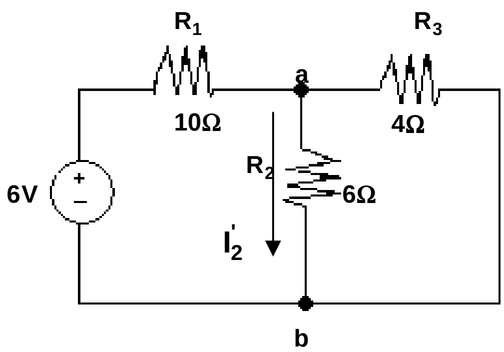
En el circuito de la figura siguiente utilice el teorema de superposición para encontrar la caída de voltaje en el resistor Nº2. (V_{ab})



El voltaje V_{ab} será el producto $I_{ab} \times R_2$ por lo tanto debemos encontrar la corriente que aporta cada fuente por separado y luego obtener la corriente I_{ab} . (I_2)

Para encontrar $I_2^{'}$ $(I_{ab}^{'})$, aplicaremos el método de reducción.

a) Anulamos la fuente de voltaje de **3V** reemplazándola por un cortocircuito.



lugar se calcula la Resistencia equivalente para luego determinar la corriente total suministrada por la fuente de **6 Volts**.

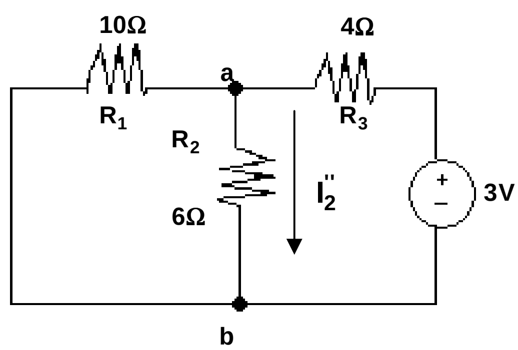
$$R_{eq} = R_1 + \left(\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \right) = 10 + \left(\frac{6 \times 4}{6 + 4} \right) = 12{,}4\Omega$$

$$I_T = \frac{V_T}{R_{eq}} = \frac{6}{12{,}4} = 0{,}484\,A$$

Para encontrar la corriente $I_2^{'}$ utilizamos la fórmula del divisor de corriente.

$$I_2^{'} = \frac{I_T \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{0{,}484 \cdot 4}{10} = 0{,}1936\,A$$

b) Anulamos la fuente de voltaje de **6V**. para determinar la corriente $I_2^{''}$ aportada la fuente de **3Volts**.



Calculamos en primer lugar la Resistencia equivalente.

$$R_{eq} = R_3 + \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right) = 4 + \left(\frac{10 \times 6}{10 + 6} \right) = 7{,}75\Omega$$

Con el valor de R_{eq} calculemos la intensidad total.

$$I_T = \frac{V_T}{R_{eq}} = \frac{3}{7{,}75} = 0{,}387\,A$$

Luego aplicamos el divisor de corriente y encontramos el valor de la corriente que circula entre **a y b**.

$$I_2'' = \frac{0{,}387 \times 10}{16} = 0{,}242\,A$$

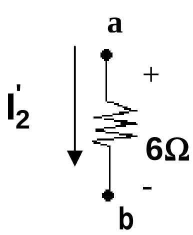
Por último, por superposición determinamos la corriente que fluye por el resistor Nº2 cuando actúan las dos fuentes simultáneamente; I_2 será la suma de las corrientes aportadas por las fuentes individuales:

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 0{,}1936 + 0{,}242 = 0{,}4356\,A$$

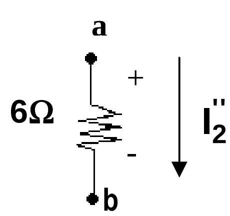
Con el valor de la corriente calculamos V_{ab}

$$V_{ab} = I_{ab} \times R_2 = 0{,}4356 \cdot 6 = 2{,}6136 \text{ Volts.}$$

Nota: También se podría haber calculado la caída de tensión en R_2 con cada fuente por separado y luego sumando estas tensiones se obtiene V_{ab}.



$$V_{ab}' = I_2' \cdot R_2 = 0{,}1936 \cdot 6 = 1{,}1616 \text{ Volts.}$$



$$V_{ab}'' = I_2'' \cdot R_2 = 0{,}242 \cdot 6 = 1{,}452 \text{ Volts.}$$

Nótese que ambas caídas de tensión tienen la misma polaridad por lo tanto $V_{ab} = V_{ab}' + V_{ab}''$.

$$V_{ab} = 1{,}1616 + 1{,}452 = 2{,}6136 \text{ Volts.}$$

Importante:

El Teorema de superposición no se puede aplicar para el cálculo de potencias; sólo corrientes y tensiones que tienen respuesta lineal.

TEOREMA DE THEVENIN

Este teorema, al igual que el Teorema de Norton, se utiliza cuando se necesita conocer la intensidad de corriente o la tensión en un elemento (resistor) determinado de un circuito.

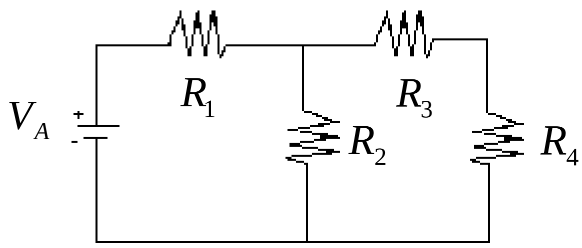
Consiste en transformar el circuito o red original reemplazándola por un circuito equivalente compuesto por una fuente independiente de tensión con un resistor conectado en serie.

El circuito equivalente que reemplaza a la red original se denomina “Circuito equivalente de Thevenin”.

La tensión que entrega se denomina "Voltaje de Thevenin" y se designa como V_{Th}.

El resistor conectado en serie con la fuente recibe el nombre de "Resistencia de Thevenin" y se designa como R_{Th}.

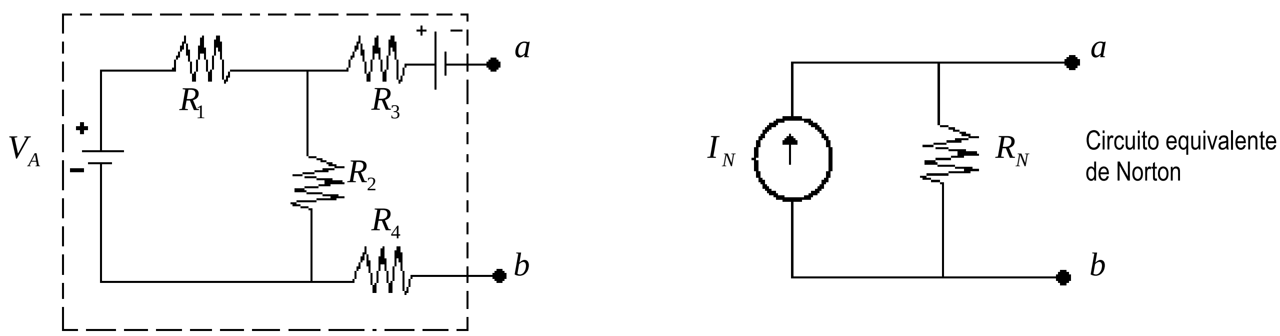
En la siguiente figura se muestra un circuito alimentado con una fuente de corriente contínua (V_A) y varios resistores; supongamos que se desea conocer el valor de la corriente y la caída de voltaje en el resistor Nº4 .



TEOREMA DE NORTON

Este teorema es similar al Teorema de Thevenin, plantea que una red o circuito relativamente complejo puede ser transformado en un circuito equivalente compuesto por una fuente de corriente con una resistencia conectada en paralelo.

En la figura que aparece a continuación se representa una red compuesta por una batería y varios resistores (lado izquierdo) y al lado derecho se representa el circuito equivalente de Norton que lo reemplazaría.

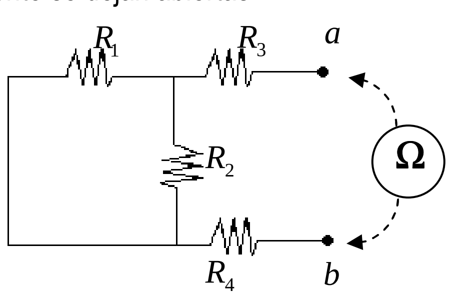


Red original

La resistencia de Norton (R_N) corresponde a la resistencia de Thevenin del circuito original, es decir, el procedimiento de cálculo es el mismo.

Para determinar la corriente de Norton (I_N) que entrega la fuente de corriente se debe hacer un cortocircuito entre los terminales ab del circuito original, la corriente que circula a través del cortocircuito es la corriente de Norton.

Para determinar la resistencia de Norton en el circuito anterior tenemos que anular las dos fuentes de tensión (Baterías V_A y V_B) reemplazándolas por un cortocircuito; si hubiesen fuentes de corriente se dejan abiertas.

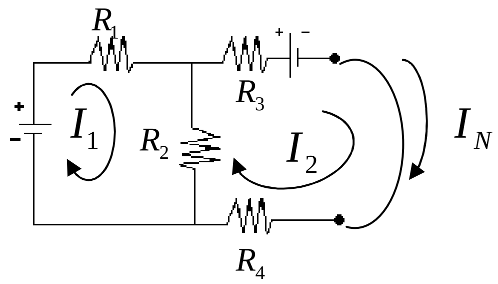


La resistencia que se mediría entre a y b es la resistencia de Norton.

En este caso dicha resistencia será:

$$R_N = \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right) + R_3 + R_4$$

Una vez que se ha encontrado el valor de la resistencia en los terminales ab se debe calcular la corriente que circulará por el cortocircuito entre a y b.

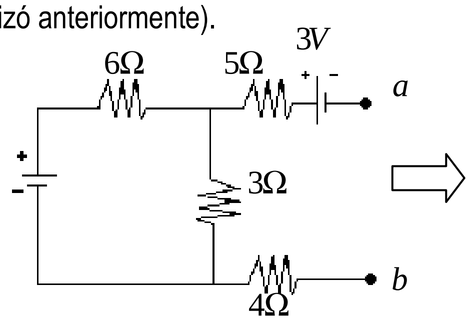


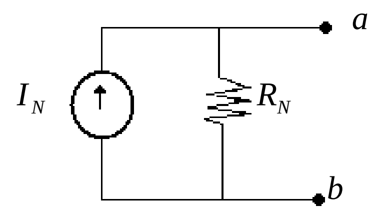
Al cortocircuitar los puntos ab
Se obtiene un circuito con dos mallas; la la corriente de Norton corresponde a la corriente de la malla 2 (I_2).

Por tanto, para encontrar dicha corriente, se deben plantear las ecuaciones de mallas y despejar el valor de esta corriente (I_2).

Ejemplo:

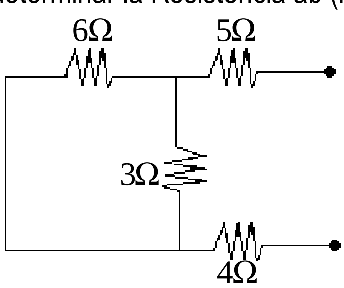
Encontrar el circuito equivalente de Norton en los extremos ab del circuito de la figura (que se analizó anteriormente).





Equivalente de Norton

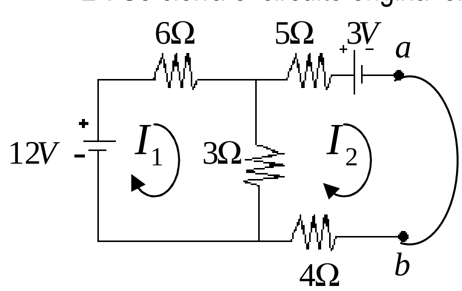
1º: determinar la Resistencia ab (resistencia de Norton) cortocircuitando las baterías.



$$R_N = \left(\frac{3 \times 6}{3+6} \right) + 5 + 4 =$$

$$R_N = 2 + 5 + 4 = 11\Omega$$

2º: Se cierra el circuito original entre a y b para encontrar la corriente de Norton que en este caso corresponde a la corriente que circula por la malla 2.



$$\left. \begin{array}{l} 9I_1 - 3I_2 = 12 \\ -3I_1 + 12I_2 = -3 \end{array} \right| \cdot 3$$

Multiplicamos por 3 la 2da. Ecuación para eliminar la corriente I_1.

$$\begin{array}{l} \cancel{9}I_1 - 3I_2 = 12 \\ -\cancel{9}I_1 + 36I_2 = -9 \end{array}$$

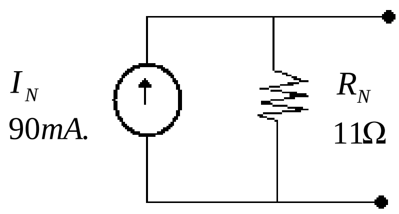
$$33I_2 = 3$$

$$I_2 = \frac{3}{33}$$

$$I_2 = 0{,}09A$$

Por lo tanto, $I_N = I_2 = 0{,}09A$.

Luego el circuito equivalente que reemplaza a la red original en los terminales ab es una fuente independiente de corriente que entrega 90 mA. con un resistor de 11 Ω conectado en paralelo (figura siguiente).



Nota: Es importante señalar que si se conoce el equivalente de Thevenin, este puede ser transformado a Norton.

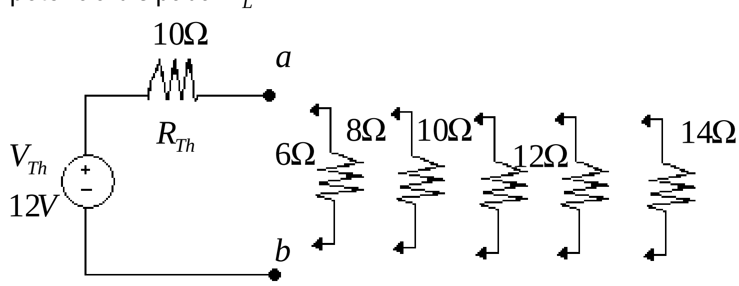
$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$; La $R_{Th} = R_N$ y se conectará en paralelo.

TEOREMA DE LA MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

"Una fuente de tensión o de corriente entrega o transfiere la máxima potencia a una carga cuando la resistencia de la carga es igual a la resistencia interna de la fuente".

Observemos el siguiente circuito:

- Está formado por una fuente independiente de voltaje que suministra 12 Volt. Y una resistencia en serie (Resistencia interna) de 10 Ω; sus terminales e salida están designadas como a y b.
- A la salida de la fuente se conectarán sucesivamente las resistencias de carga que se muestran.
- Para cada valor de la carga se calculará la corriente (I_L), la caída de voltaje (V_L) y la potencia disipada P_L.



- Los valores calculados se anotarán en la siguiente tabla; esto nos permitirá observar en qué condiciones de carga se produce la máxima disipación de potencia.

$R_L \Omega$	$V_L = \frac{V_{Th} \cdot R_L}{R_{Th} + R_L} = V$	$I_L = \frac{V_L}{R_L} = A$	$P_L = \frac{V_L^2}{R_L} = W$
6	4,5	0,75	3,375
8	5,33	0,66	3,55
10	6	0,6	3,6
12	6,54	0,545	3,56
14	7	0,5	3,5

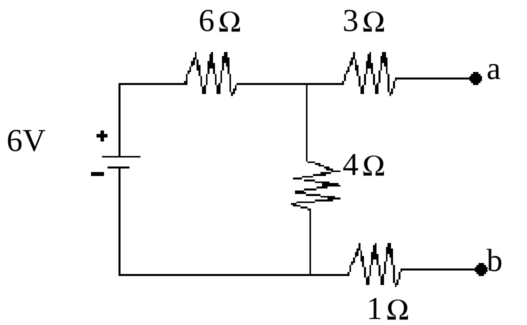
Observando los valores que se obtuvieron se puede señalar que la resistencia de carga de 10 Ω disipa la mayor potencia, además se puede visualizar que en estas condiciones la tensión en R_L es exactamente la mitad de la tensión que entrega la fuente, en este caso 6 Volt.

Por lo tanto, se puede establecer una ecuación que permite calcular la potencia máxima que una fuente o que una red activa puede entregar a un resistor.

$$\boxed{P_{MAX} = \frac{V_{Th}^2}{4 \cdot R_{Th}}}$$

Ejemplo de aplicación

Determinar la P_{MAX} que la redactiva de la figura entregará entre los terminales ab.

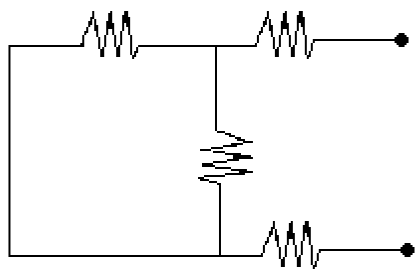


En primer lugar se debe trasformar el circuito, convirtiéndolo en una fuente de voltaje (V_{Th}) con una resistencia en serie (R_{Th}).

El voltaje entre a y b en este caso corresponde a la caída de tensión en el resistor de 4Ω, esta tensión la determinamos aplicando divisor de voltaje.

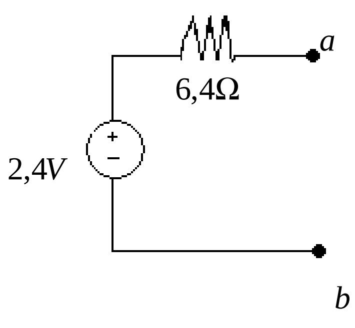
$$V_{Th} = \frac{6 \times 4}{6+4} = \frac{24}{10} = 2{,}4\,Volt.$$

La Resistencia R_{Th} se calcula anulando la fuente de voltaje.



$$R_{Th} = \left(\frac{6 \times 4}{6+4}\right) + 3 + 1 = 6{,}4\Omega$$

Luego la fuente equivalente queda:



Calculamos la P_{MAX}

$$P_{MAX} = \frac{2{,}4^2}{4 \cdot 6{,}4} = \frac{5{,}76}{25{,}6} = 0{,}225\,Watt.$$

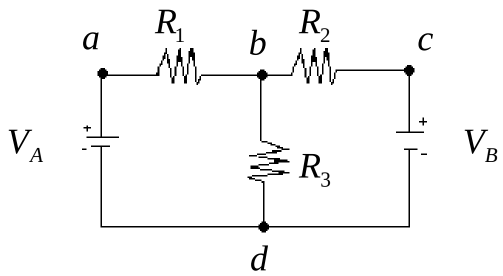
Por tanto, la red original entregará 0,225 Watt a un resistor de $6{,}4\Omega$ conectado entre los terminales ab; recuerde que la máxima transferencia de potencia se produce cuando la Resistencia de carga es igual a la resistencia interna de la fuente; en este caso $R_{Th} = 6{,}4\Omega$.

ANÁLISIS DE NODOS O NUDOS

Este método de análisis y resolución de circuito tiene como propósito encontrar el voltaje que existe entre los nudos principales de una red y un nudo tomado como referencia.

Se conoce como nudo a la unión entre 2 o mas elementos de un circuito, y se denomina nudo principal a los nudos formados por 3 o más terminales de elementos de un circuito.

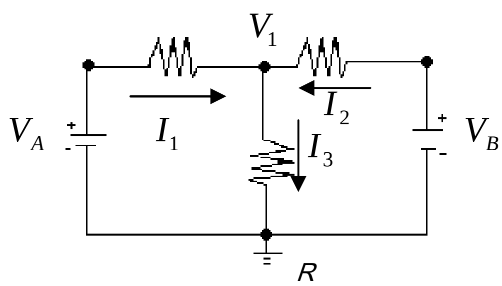
Por ejemplo, en el circuito de la figura tenemos 4 nudos señalados con la letras abad, pero sólo los nudos b y d se consideran como nudos principales.



Para efectuar el análisis de nudos en un circuito debemos elegir uno de los nudos principales como referencia (arbitrariamente), este nudo se considerará como tierra.

Luego se aplica la Ley de corrientes de Kirchhoff a cada uno de los nudos principales menos al nudo de referencia; se debe plantear una ecuación por cada uno de los nudos analizados.

Apliquemos el análisis de nudos al circuito anterior, el nudo d ubicado en la parte inferior se considerará como referencia.



En este caso la incógnita es el voltaje V_1, es decir, el voltaje entre el nudo b y el nudo de referencia (d).

Para aplicar la Ley de corrientes de Kirchhoff al nudo V_1 se asigna sentido a las corrientes que llegan a dicho nudo $(I_1, I_2 e I_3)$, en este caso I_1 e I_2 se dirigen hacia el nudo por lo tanto se les asignará sentido positivo, I_3 se aleja del nudo por lo tanto será negativa.

$$\boxed{I_1 + I_2 - I_3 = 0}$$ LCK.

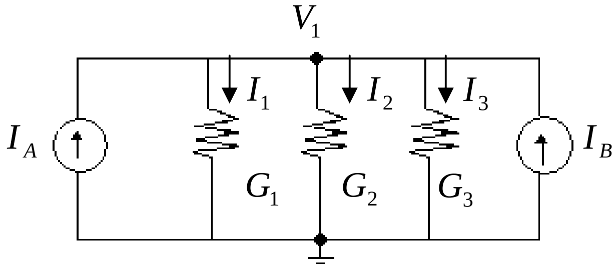
$$I_1 = \frac{V_A - V_1}{R_1}, \ I_2 = \frac{V_B - V_1}{R_2} \text{ e } I_3 = \frac{V_1}{R_3}.$$

Estas expresiones se reemplazan en la ecuación inicial.

$$\boxed{\frac{V_A - V_1}{R_1} + \frac{V_B - V_1}{R_2} - \frac{V_1}{R_3} = 0}$$ Ecuación del nudo V_1.

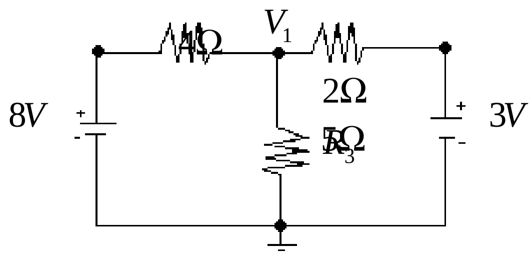
Otra forma para plantear las ecuaciones de nudos y que facilita el cálculo cuando el circuito tiene más de dos nudos consiste en transformar las fuentes voltaje a fuentes de corriente y las resistencias a conductancias, luego se plantean las ecuaciones de cada nudo.

En este caso el circuito queda transformado a:



$$-I_1 - I_2 - I_3 + I_A + I_B = 0$$
$$I_A + I_B = I_1 + I_2 + I_3$$
$$I_A + I_B = G_1 \cdot V_1 + G_2 \cdot V_1 + G_3 \cdot V_1$$
$$\boxed{I_A + I_B = (G_1 + G_2 + G_3) \cdot V_1}$$ Ecuación del nudo V_1.

Ejemplo: Asignado valores al circuito anterior, se desea determinar el voltaje en la resistencia Nº 3 conectada entre los nudos b y d.



$$\frac{V_A - V_1}{R_1} + \frac{V_B - V_1}{R_2} - \frac{V_1}{R_3} = 0$$

$$\frac{8 - V_1}{4} + \frac{3 - V_1}{2} - \frac{V_1}{5} = 0 / 20$$

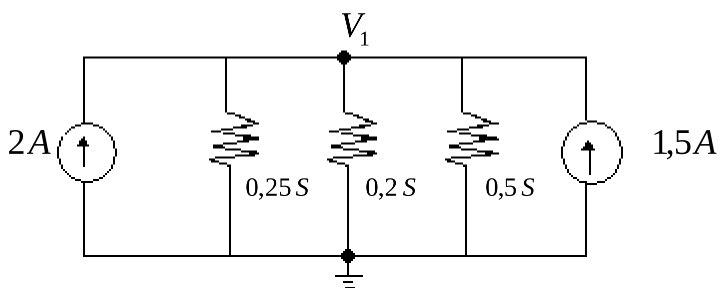
$$40 - 5V_1 + 30 - 10V_1 - 4V_1 = 0$$

$$-19V_1 = -70$$

$$V_1 = \frac{-70}{-19}$$

$$V_1 = 3{,}68\,Volt.$$

Transformado las fuentes de tensión a fuentes de corriente y los resistores a conductancias.



$$(G_1 + G_2 + G_3)V_1 = I_A + I_B$$

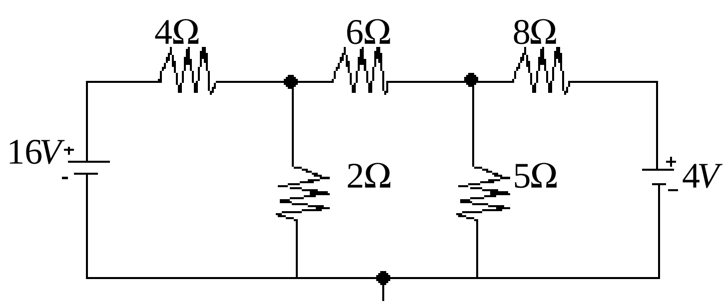
$$0{,}95 \cdot V_1 = 3{,}5$$

$$V_1 = \frac{3{,}5}{0{,}95}$$

$$V_1 = 3{,}68\,Volt.$$

<u>EJERCICIOS RESUELTOS</u>

1) En el circuito de la figura se desea encontrar el voltaje en la resistencia de $6\,\Omega$; resuélvalo aplicando cada uno de los métodos explicados anteriormente.

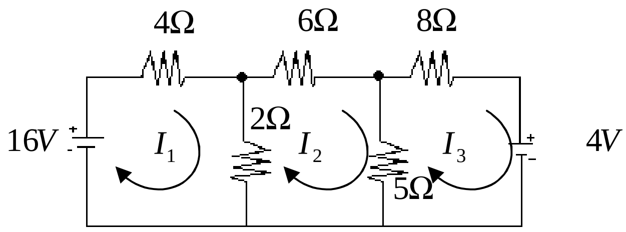


1.1) **<u>Por análisis de mallas:</u>**

La caída de voltaje en el Resistor de 6 Ω se encuentra multiplicando la corriente de la malla 2 por el valor de dicho resistor.

$$V_{R(6\Omega)} = I_2 \times R_{(6\Omega)} =$$

Para encontrar el valor de la corriente I_2 se deben plantear las ecuaciones de cada malla (3 ecuaciones), asignando sentido a las corrientes. Nótese que la malla 1 y la malla 3 no tiene resistor en común y que en la malla 2 no hay fuente de tensión.



$$\begin{aligned} 6I_1 - 2I_2 0I_3 &= 16 \\ -2I_1 + 13I_2 - 5I_3 &= 0 \\ 0I_1 - 5I_2 + 13I_3 &= -4 \end{aligned}$$

<u>Nota:</u> Observe que para el sentido asignado a la corriente en la malla 3 la fuente de 4Volt. es negativa.

Para encontrar el valor de la corriente I_2 se aplicará la Regla de Cramer:

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} =$$

0

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc|cc} 6 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ -2 & 13 & -5 & -2 & 13 \\ 0 & -5 & 13 & 0 & -5 \end{array} \right. = 1014 -$$

$$\Delta I_2 \left| \begin{array}{ccc|cc} 6 & 16 & 0 & 6 & 16 \\ -2 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & 0 & -4 \end{array} \right. =$$

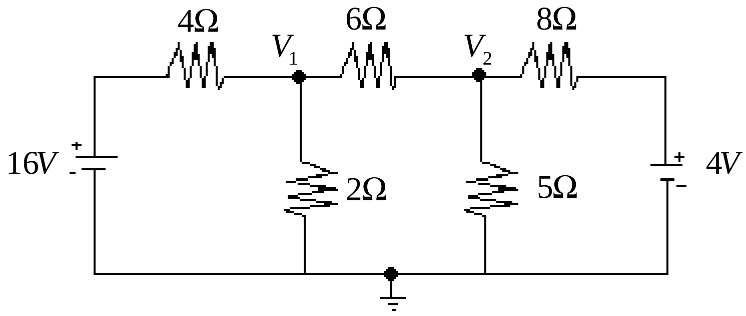
Con estos valores calculamos $I_2 = 0{,}365A$

Por último determinamos la caída de voltaje que se pide:

$$V_{R(6\Omega)} = 0{,}365 \times 6 = 2{,}19\,Volt.$$

1.2) **<u>Por análisis de Nudos:</u>**

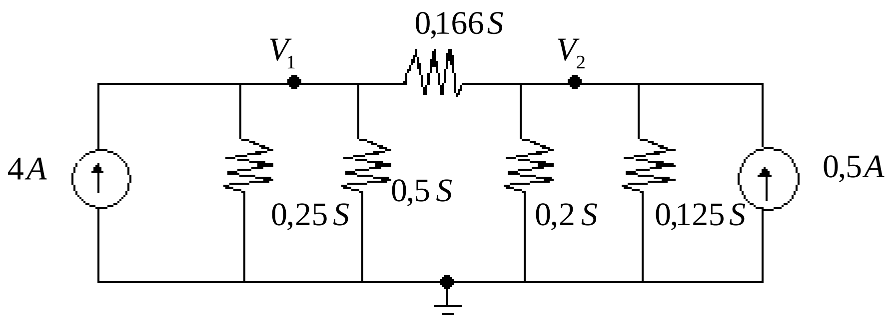
Llamamos V_1 y V_2 a los nudos entre los cuales está conectada la resistencia de 6 Ω y elegiremos el nudo inferior como referencia designándolo como “tierra”.



El voltaje que se pide determinar será: $V_{R(6\Omega)} = V_1 - V_2$ ya que, tal como se señaló, la resistencia de $6\,\Omega$ está conectada entre estos dos nudos.

Por lo tanto es necesario encontrar el valor del voltaje V_1 y V_2 (recuerde que estos voltajes se expresan respecto al nudo de referencia, es decir, V_1 es la caída de tensión en la resistencia de $2\,\Omega$ y V_2 es la caída de tensión en la resistencia de $5\,\Omega$)

Para aplicar el análisis de nudos transformaremos las fuentes de voltaje a fuentes de corriente y las resistencias a conductancias.



Al nudo V_1 están conectadas las conductancias 0,25 – 0,5 y 0,166 Siemens y la fuente de corriente de 4A.

Al nudo V_2 llegan las conductancias de 0,166 – 0,2 y 0,125 Siemens y la fuente de corriente de 0,5 A.

Nótese que la conductancia de 0,166 Siemens (que corresponde a la resistencia de 6Ω) está conectada entre los nudos V_1 y V_2 por lo tanto la corriente en ella será $(V_1 - V_2)\cdot G_3$, es decir, $I = G_3V_1 - G_3V_2$ por lo tanto las ecuaciones serán:

$$\begin{array}{r} (G_1 + G_2 + G_3)V_1 - G_3V_2 = I_A \\ -G_3V_1 + (G_3 + G_4 + G_5)V_2 = I_B \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}916V_1 - 0{,}166V_2 = 4 \\ -0{,}166V_1 + 0{,}491V_2 = 0{,}5 \end{array}$$

Aplicando uno de los métodos de resolución de ecuaciones simultáneas se encuentran V_1 y V_2.

$V_1 = 4{,}848\,Volt.$
$V_2 = 2{,}657\,Volt.$

Por último se determina $V_{R(6\Omega)} = V_1 - V_2 = 4{,}848 - 2{,}657 = \boxed{2{,}191\ Volt.}$